

LA FILLOTASSI

Spunti di ricerca da una disciplina fra botanica e matematica

Agli occhi di coloro che ancora sogliono osservare la natura e meravigliarsene, una delle fonti di stupore più comuni e accessibili sta nella struttura ordinata che manifestano certe forme botaniche quali le corolle dei girasoli, le pigne o il fiore del broccolo romano. E' appassionante contemplare queste meravigliose forme, accomunate dall'essere composte dalla distribuzione ordinatissima di elementi (i semi del girasole, le scaglie della pigna...): saltano quasi subito agli occhi che essi formano delle spire che si avvolgono a formare l'intera struttura. Poco dopo ci si accorge che spire simili, seppur diversamente inclinate, si avvolgono nel senso opposto, così che ogni elemento, seme o scaglia, appartiene a due spire, una che si avvolge in senso orario e l'altra in senso antiorario. E non basta: approfondendo la contemplazione, si possono osservare ancora tante altre spire, magari formate da elementi che non si toccano. Una sorpresa ancora maggiore è riservata a coloro che hanno la pazienza di contare il numero delle spire simili: si trova che ricorrono quasi sempre solo certi pochi numeri, quelli appartenenti alla successione 1,1,2,3,5,8,13,21,34... in cui ogni termine dopo i primi due è la somma dei due termini precedenti, nota come *successione di Fibonacci*.

Didascalie: Broccolo romano / Pigna: sono evidenziate le spire che per prime saltano agli occhi: se ne contano 8 in senso orario e 13 in senso antiorario

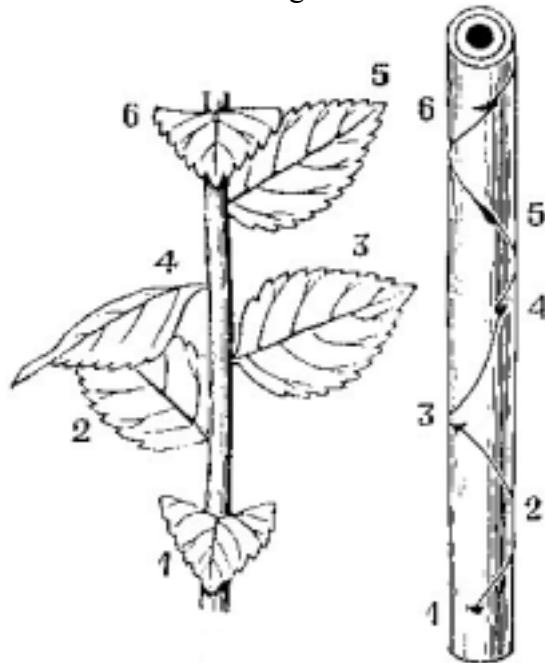
Come insegna Aristotele nel famoso incipit della *Metafisica*, la meraviglia è il motore della ricerca dell'uomo, la quale deve mirare a rimuovere la meraviglia stessa elaborando un sapere teorico che offra ragioni per comprendere i fatti che l'han suscitata, al punto che, dopo averli così compresi, ci si stupirebbe se codesti fatti risultassero diversi da come ci appaiono. Il compito di formulare una descrizione soddisfacente delle strutture botaniche illustrate e di tentare di proporne spiegazioni è lo scopo di una disciplina a cavallo fra botanica, matematica, biologia e non solo: la *fillotassi*.

L'etimologia del nome (dal greco *phýllon*, “foglia” e *tàksis*, “disposizione”) avverte che questa scienza si occupa di più che dei pochi esempi presentati: essa nasce anzi dall'osservazione delle regolarità nelle disposizioni delle foglie sui fusti delle piante, e solo in seguito (almeno sui libri) sono state osservate le regolarità appena descritte. Le foglie di una pianta e i semi del girasole sono accomunate dall'essere specializzazioni dei primordi generati dall'apice meristemato¹: si può quindi dire che la fillotassi è una sottodivisione della morfologia botanica che studia la disposizione di unità generate dall'apice meristemato, pur segnalando che anche questa è una definizione approssimativa.

Le segnalazioni più antiche

La più antica segnalazione delle regolarità in oggetto si trova in Teofrasto (370 a.C.,-285 a.C.) che

nel suo *Enquiry into Plants* dice che “quelle che hanno foglie piatte le hanno in serie regolari”. Plinio il Vecchio (23-79 d.C.), nella sua *Naturalis Historia*, descrivendo una pianta, scrisse che “è ramosa, folta, con cinque o sei foglie a intervalli regolari, disposte in circolo attorno ai rami”. Secoli dopo anche Leonardo da Vinci nel *Trattato sulla pittura* descrisse la stessa disposizione in cicli di cinque foglie: “ha messo la natura le foglie degli ultimi rami di molte piante, che sempre la sesta foglia è sopra la prima, e così segue successivamente, se la regola non è impedita” avanzando anche una spiegazione, basata sull'idea che in questo modo le foglie superiori non coprono le inferiori. Il seguente disegno che raffigura un rametto di ciliegio può illustrare l'osservazione di Leonardo: partendo da certa foglia data (la numero 1), prima di trovare una foglia orientata come quella (la 6) si contano 5 foglie disposte su una spirale che fa due giri attorno al rametto. Per questo si parla di fillotassi $2/5$. Leonardo osserva anche che “gli angoli delle divisioni delle ramificazioni degli alberi sono infra loro eguali”, ossia che per passare da una foglia a quella successiva bisogna ruotare sempre di uno stesso angolo, oggi noto come *divergenza*. Non è difficile rendersi conto che assumendo per divergenza una certa frazione dell'angolo giro, per esempio $2/5$, dopo 2 angoli giri si trova la quinta foglia che è sovrapposta alla foglia di partenza, e pertanto, in questa rozza schematizzazione, la frazione che esprime la divergenza è uguale alla frazione che esprime la fillotassi come numero foglie in un ciclo / numero giri del fusto nel ciclo.



Didascalia: schematizzazione della disposizione delle foglie su un rametto di ciliegio. La foglia numero 6 è (approssimativamente) sovrapposta alla numero 1. Esse sono separate da altre quattro foglie, disposte lungo una spirale che fa due giri attorno al fusto.

Molto interessante è il punto di vista di Keplero. Il grande astronomo era affascinato dal numero cinque, il numero dei solidi regolari, dei semi in una sezione di una mela, e gioca un ruolo notevole nelle simmetrie degli esseri viventi. Osservando anche i cicli di cinque foglie sugli steli delle piante, e sapendo che cinque è un numero di Fibonacci, collegò fra loro la capacità di produrre semi di una pianta con la “capacità di auto-propagazione” della successione di Fibonacci. Oggi possiamo facilmente renderci conto dell'inconsistenza logica di questo ardito collegamento: cinque è un numero che appartiene ovviamente anche ad altre successioni; non è corretto dire che la successione di Fibonacci si propaga da sola poiché essa si propaga secondo la regola ricorsiva che noi definiamo, e ad ogni modo quella di Fibonacci non è certo l'unica successione regolata da una legge ricorsiva; ma soprattutto Keplero non mostra alcuna relazione strutturale fra i due fatti che accosta. Queste considerazioni tuttavia non fanno che accrescere la stima per la sorprendente intuizione di Keplero, che per primo accostò la successione di Fibonacci alla fillotassi². Come già segnalato a proposito del numero delle spire osservabili su girasoli, pigne e broccoli, anche i due numeri che

esprimono il rapporto numero giri / numero foglie sono quasi sempre³ numeri di Fibonacci: Keplero, seppur attraverso un'argomentazione fallace, aveva dunque colto nel segno: si trovano cicli di cinque foglie proprio perché cinque è un numero di Fibonacci!

Fillotassi e sezione aurea

La comparsa dei numeri di Fibonacci nei fenomeni di fillotassi è la ragione principale per la quale negli ultimi anni questo settore del sapere ha avuto una discreta diffusione, in particolare su pubblicazioni di taglio divulgativo. Infatti, i numeri di Fibonacci sono strettamente legati al cosiddetto “numero aureo” τ , approssimativamente 1,618, che è il valore del rapporto che definisce la “sezione aurea”⁵. A questo oggetto matematico sono state dedicate molte ricerche e pubblicazioni, spesso di carattere divulgativo o esoterico, che hanno avuto molta fortuna nel presentare teorie secondo le quali la sezione aurea giocherebbe un ruolo fondamentale in arte e architettura, e avrebbe importanti riscontri nella storia della cultura e nelle forme naturali. Recenti studi più sobri e oggettivi hanno dimostrato l'inconsistenza di molte di queste affermazioni⁴, ma la loro scarsa diffusione fa sì che il fascino del cosiddetto “golden-numerismo” trovi terreno fertile fra il grande pubblico e a volte anche fra persone colte e addirittura matematici. Pertanto proliferano le pubblicazioni che scandagliano le presunte “apparizioni” della sezione aurea in ogni settore dello scibile. Dopo un serio vaglio razionale, di tutte queste la più (se non la sola) significativa consiste proprio nell'occorrenza dei numeri di Fibonacci, e quindi più o meno direttamente del numero aureo, nella fillotassi. Il desiderio di fare chiarezza su questo “mistero” costituisce senza dubbio una grande propulsione per gli studi in questa disciplina.

I primi studi sistematici

Anche il grande naturalista Linneo (1707-1778) accennò alla fillotassi: nel suo *Systema Naturae* adottò la stessa classificazione delle distribuzioni delle foglie proposta in una memoria di Sauvages del 1743: foglie opposte, foglie alternate, volute di tre o più foglie e foglie con “distribuzione non costante”

Charles Bonnet (1720-1793), considerato l'iniziatore di osservazioni approfondite della fillotassi, nel suo libro *Recherches sur l'Usage des Feuilles dans les Plantes* (1754) dichiarò di aver trovato una categoria di simmetria che sembrava essere sfuggita a Linneo e Sauvages, ossia la distribuzione a spirale, e descrisse molto elegantemente la fillotassi 2/5 già individuata da Leonardo. Usando la terminologia aristotelica, Bonnet scrisse che la causa finale di questa sistemazione era di assicurare che le foglie si coprissero l'una l'altra il meno possibile per permettere la libera circolazione dell'aria.

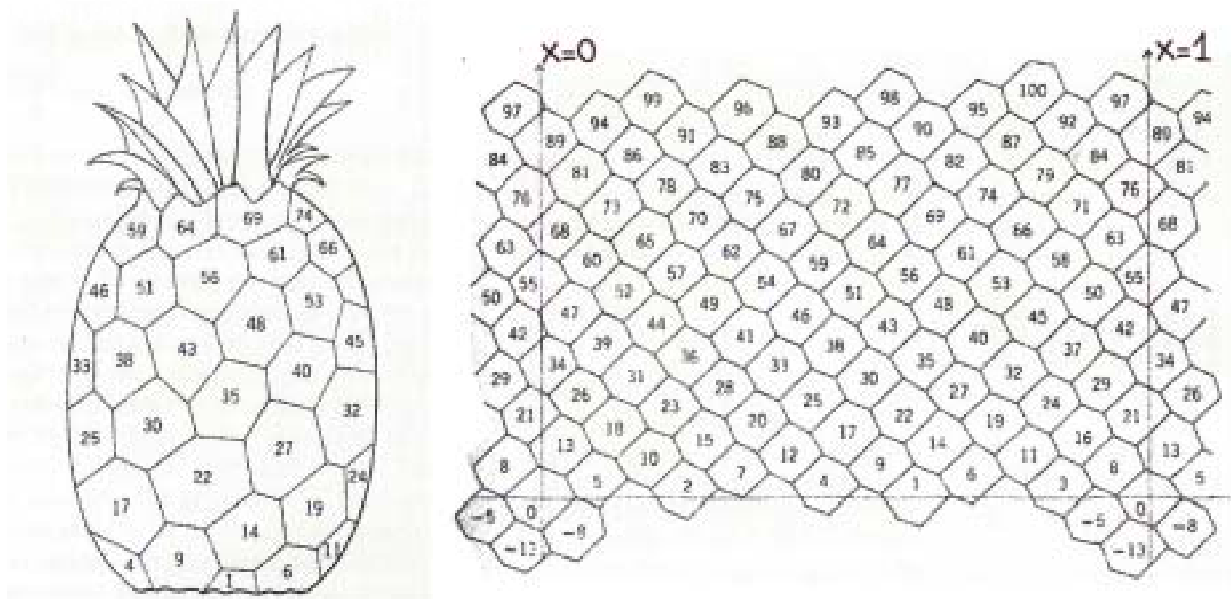
I primi studi sistematici riguardo alla fillotassi risalgono agli anni 30 del XIX secolo ad opera di Schimper (1830), Braun (1835) e soprattutto i fratelli Bravais (“Essai sur la disposition des feuilles curvisérisées” in *Annales Des Sciences Naturelles Botanique* 7 e 8, 1837). Con questi lavori, la materia maturò in una vera e propria disciplina scientifica che combina l'osservazione con ipotesi teoretiche e l'utilizzo di sofisticati strumenti matematici. A Schimper si deve l'osservazione che le fillotassi più comuni sono il rapporto di due numeri di Fibonacci alternati, come 1/3, 2/5, 3/8 ecc... Braun aggiunse l'osservazione delle spire secondarie, in particolare sulla pigna, notò che anche le quantità di queste spire sono numeri di Fibonacci, in questo caso consecutivi (3 e 5, 5 e 8, 8 e 13...) e per primo collegò questo fatto alla sezione aurea⁶. I fratelli Louis e Auguste Bravais, il primo fisico e botanico, il secondo ufficiale navale ed esploratore, introdussero metodi di analisi che divennero permanenti nella nuova scienza quali la rappresentazione delle foglie come un reticolo di punti su un cilindro e la postulazione di angoli di divergenza non razionali (il che risponde all'osservazione, che era già in Schimper, che le foglie non sono mai esattamente sovrapposte). Inoltre, essi individuarono una schematica relazione fra la spirale generatrice e le spire secondarie visibili. Questa relazione emerge molto chiaramente da una rappresentazione geometrica proposta da un importante matematico del XX secolo.

Il modello di Coxeter

In un'esposizione divenuta famosa ([3]) H.S.M. Coxeter ha illustrato la genesi della disposizione delle scaglie che compongono la buccia di un ananas, mostrando che, assumendo che esse vengano generate una ad una separate da una rotazione costante pari alla sezione aurea dell'angolo giro, è naturale che emergano delle spire che si avvolgono nei due sensi attorno all'ananas, e che queste siano in quantità pari a un numero di Fibonacci.

Idealizzando la buccia dell'ananas come la superficie di un cilindro, si immagina di aprirla lungo una linea verticale e di distenderla su un piano, ottenendo così una striscia compresa fra due copie della stessa linea.

Si fissi un sistema di riferimento (x, y) ponendo l'origine in corrispondenza della prima scaglia, e chiamando le due copie della linea di cesura $x = 0$ e $x = 1$, ponendo così uguale a 1 la lunghezza della circonferenza di base del cilindro. Supponendo che ogni scaglia ruoti rispetto alla precedente esattamente la parte maggiore della sezione aurea dell'angolo giro⁷, l'ascissa della scaglia 1 sarà 0,618, per la scaglia 2 sarà $2 \cdot 0,618 = 1,236$, o per meglio dire la sua parte decimale 0,236, per rendere conto del fatto che, oltrepassata la linea $x = 1$ si riparte da $x = 0$, dopo un giro attorno al cilindro. L'ascissa della terza scaglia sarà la parte decimale di $3 \cdot 0,618$, cioè 0,854, l'ascissa della quarta scaglia 0,472 e così via. Se si assume che, nella direzione delle y ogni scaglia si alzi di una certa quantità costante h rispetto alla precedente (nella figura $h = 1/150$) e che le scaglie acquistino la tipica forma esagonale per ragioni di mutua pressione, si viene a generare il seguente reticolo:



Balzano all'occhio delle file di scaglie allineate, inclinate dal basso all'alto verso destra, i cui numeri d'ordine seguono una progressione aritmetica di ordine 13: 0,13,26...; 5,18,31,...; 10,23,36... e così via. E' anche facile contare quante sono: poiché esse possono essere identificate dalla prima scaglia che può essere un numero fra 0 e 12, esse sono tredici. Ma nella stessa direzione sono visibili anche cinque file meno inclinate, composte da scaglie numerate per 5, e nell'altra direzione si vede un terzo insieme di otto file formate da scaglie numerate per 8. Quando la striscia di piano fra $x = 0$ e $x = 1$ viene arrotolata a formare un cilindro queste file diventano spire che avvolgono il cilindro: proprio quelle spire di cui si occupa la filotassi.

Si noti che le file che appaiono più evidenti non sono le uniche file esistenti: tutte le scaglie in progressione aritmetica sono allineate (per esempio 0,7,14,21...), ma gli allineamenti visibili sono solo quelli la cui progressione è determinata dai numeri d'ordine della scaglie che toccano la scaglia numero 0. Pertanto per spiegare perché gli insiemi di spirali visibili hanno per cardinalità dei

numeri di Fibonacci, basta spiegare perché le scaglie che toccano la scaglia 0 hanno per numero d'ordine dei numeri di Fibonacci. Intanto, si noti che non è necessario che siano proprio la 5, la 8 e la 13 a toccare la 0: senza entrare nei dettagli, è intuitivo che per valori di h più piccoli, lo spazio fra le scaglie 8 e 13 aumenterebbe e per un certo valore di h la 21 toccherebbe la 0, e la 5 non la toccherebbe più. Ad ogni modo, la scaglia 0 sarebbe toccata sempre da un numero di Fibonacci, facendo sì che in tale quantità sarebbero le spire. Ciò accade per una profonda questione di teoria dei numeri che sta alla base del rapporto fra numeri di Fibonacci e sezione aurea: si dimostra infatti che le migliori approssimazioni razionali⁸ del numero (irrazionale) $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618033\dots$ sono date dai rapporti di numeri di Fibonacci consecutivi (come 5/8, 8/13, 13/21: per esempio 8/13=0,615) cosicché se f è un numero di Fibonacci $f \cdot 0,618$ è poco diverso da un numero intero, e pertanto la sua parte decimale è molto vicina a 0. Per esempio $13 \cdot 0,618 = 8,034$: ciò è un modo diverso di vedere quanto appena detto, cioè che 8/13 è vicino a 0,618.

La fillotassi nel XX secolo

La rappresentazione appena presentata è molto chiara ma è troppo semplice per essere soddisfacente. Innanzitutto essa non può rendere conto della presenza in natura di successioni diverse da quella di Fibonacci. Inoltre, anche le ipotesi fatte sulla disposizione delle scaglie sono migliorabili: non è del tutto esatto che il parametro h sia sempre costante, e soprattutto rimane inspiegato il motivo per cui la divergenza sia proprio la sezione aurea dell'angolo giro. In effetti, la ricerca nella scienza della fillotassi è andata ben oltre il modello di Coxeter, ed è lungi dall'essere conclusa. Alla fine del XIX secolo, Sachs (*Textbook of Botany*, London 1882) propose un approccio radicalmente diverso da quelli fin lì sviluppati, respingendo ogni teoria matematica per la fillotassi, affermando che non si trattava di nient'altro che di un gioco coi numeri e che le spirali osservate sulle piante erano nient'altro che un'irriducibile soggettività. La sua opera ebbe una notevole eco, e influì anche su alcuni autori quali D'Arcy Thompson (*On Growth and Form*, Cambridge 1917) e Plantefol (*La théorie des hélices foliaires multiples*, Paris 1948), che preferì un approccio puramente botanico che viene presentato ancora nei manuali di botanica. Ciò non ha arrestato la ricerca puramente matematica, che ha condotto ad una vera e propria organica teoria astratta della fillotassi, che culmina nel cosiddetto Teorema Fondamentale della Fillotassi, dimostrato da Adler ([1]) e precisato da Jean ([6]). Questo teorema mette ordine nell'apparentemente confusa molteplicità di spire che si osservano sulle piante, e precisa la relazione fra la spirale generatrice e le spire secondarie. Con il Teorema fondamentale della fillotassi si ottiene una *descrizione* matematica abbastanza soddisfacente dei fenomeni oggetto di studio. Eppure, ciò non permette di affermare di avere *compreso* tali fenomeni, se si intende che la ricerca scientifica sia rivolta all'individuazione delle *cause* per le quali essi sono così e non altrimenti. In effetti, ogni modello matematico necessita in partenza di alcune ipotesi riguardo al fenomeno da modellare. Un modello matematico non è mai neutrale, oggettivo: esiste sempre una componente soggettiva che riflette le opinioni di chi lo pone in essere. Se poi le conseguenze predette dal modello matematico concordano con quelle che in effetti si manifestano in natura, se cioè il modello ha una buona capacità predittiva o descrittiva, in qualche maniera ciò corrobora le ipotesi fatte in partenza, ma a rigore non le dimostra affatto. Nel concreto della fillotassi, sono numerose le ipotesi avanzate, da Leonardo in poi per cercare di spiegare in che modo le piante producano le strutture osservate e di quale natura sia e dove sia situato l'organo che coordina tale organizzazione. L'ipotesi funzionale di Leonardo e Bonnet ("il fine della struttura è di minimizzare la sovrapposizione fra le foglie") fu ripresa, spogliata del suo contenuto teleologico e riproposta in un ambito evolucionistico, da Wiesner nel 1875, ed ebbe tanto successo da essere ancora riportata nei manuali di botanica come Legge di Wiesner. In sintesi, essa afferma che una distribuzione a spirale la cui divergenza sia la sezione aurea dell'angolo giro produce il minore ombreggiamento possibile delle foglie superiori sulle inferiori, permettendo così che l'insieme delle foglie catturi il massimo della luce disponibile⁹. Nel 1972 Leigh tentò una

dimostrazione matematica di questa legge. Tuttavia questa ipotesi perde credito alla luce di una simulazione al computer elaborata da Niklas nel 1988 (cfr. [2]), nella quale furono considerati un gran numero di fattori connessi alla luce. Una delle conclusioni fu che il bisogno di luce non conduce necessariamente alla “divergenza aurea” poiché l'illuminazione ottimale si potrebbe ottenere altrimenti, per esempio producendo foglie più lunghe e strette.

La necessità della sezione aurea dell'angolo giro è dimostrata rigorosamente da Adler ([1]) partendo da tutt'altra ipotesi, secondo la quale il criterio adottato dall'apice per generare nuovi primordi è quello della massimizzazione della distanza minima fra le foglie. Tuttavia, non esistono riscontri a questa ipotesi negli studi puramente biologici sull'apice. Ma soprattutto, molte altre ipotesi, spesso in contrapposizione fra loro, riescono in qualche modo a dare conto degli stessi fenomeni di fillotassi. Jean ([7]) cita un lavoro di Schwabe ([8]) nel quale sono raccolte circa trenta ipotesi che sono state elaborate per spiegare gli aspetti dinamici e causali della formazione di strutture in fillotassi. Sempre secondo Jean, esse possono essere rozzamente catalogate nel modo che segue:

Ipotesi chimiche Sostengono che la causa dell'origine delle strutture stia nella diffusione di inibitori o attivatori chimici emanati dai primordi esistenti o dall'apice. Secondo queste ipotesi, un primordio sorgerebbe dall'apice in quella direzione nella quale la concentrazione dell'inibitore (o dell'attivatore) è minore (o maggiore). Queste ipotesi sono in grado di condurre a descrizioni accurate, ma non hanno trovato alcun riscontro sperimentale (cfr. [7])

Approcci fisici Sono più variegati: Snow e Snow sostennero che i nuovi primordi si formano quando una certa minima quantità di spazio disponibile viene raggiunta, Schwendener basò le strutture sulla mutua pressione fisica fra i primordi, secondo Wolpert le cellule risponderebbero a un'informazione posizionale. Hardwick argomenta contro tutte queste ipotesi, proponendo un meccanismo temporale basato sulla minimizzazione dell'energia.

Approccio sistemico Si tratta dell'approccio avanzato da Jean “basata sull'osservazione e su un approccio attraverso il quale è possibile formulare un corpus di conoscenza, sviluppare modelli dinamici capaci di formulare predizioni che possono venire verificate o respinte, suggerire esperimenti ai biologi, proporre soluzioni più coerenti ai problemi della fillotassi, e offrire una particolare cornice nella quale si possano organizzare dati sperimentali e implementare un programma generale di studi”. Questa teoria, proponendosi come un approccio multidisciplinare, incorpora e sviluppa aspetti di ipotesi o teorie già proposte da botanici, paleontologi, morfologi e genetisti.

Questi veloci tratti riescono a dare l'idea di quanto negli ultimi quaranta anni la fillotassi si sia evoluta, al punto di meritare lo status di scienza a sé, con i propri problemi, i propri metodi e la propria storia. Una caratteristica molto interessante di questa scienza è il suo alto tenore di multidisciplinarietà. Appare oggi evidente che affrontare da un solo punto di vista le strutture della fillotassi equivale a coglierle solo parzialmente, e solo tenendo presente tutte le sfaccettature proposte dai singoli approcci si può sperare di giungere ad una comprensione, se non completa, almeno più profonda. Ai tradizionali approcci botanico e matematico, si sono nel tempo aggiunti quelli offerti da fisica, chimica, biologia molecolare, morfologia comparativa e teorie dell'evoluzione.

Un discorso a parte merita il rapporto fra fillotassi e cristallografia. Due scienze in apparenza molto lontane: non fosse altro perché l'una si occupa di esseri viventi e l'altra di non viventi. Eppure fra di esse esiste un *trait d'union* in quanto entrambe si occupano di auto-organizzazione di forme ripetute. Non a caso le due scienze hanno un fondatore in comune, il già citato Auguste Bravais, il quale, dopo aver aiutato il fratello negli studi sulla morfologia delle piante, fu tra i primi ad occuparsi di cristallografia. Jean ([7]) osserva che “per i cristallografi una margherita è un cristallo vivente”. La sorprendente connessione così creata fra mondo animato e inanimato acquista ancora maggior forza alla luce di recenti scoperte di strutture di fillotassi al di fuori della botanica. I fisici Douady e Couder ([4]) hanno prodotto strutture di fillotassi in laboratorio lasciando cadere periodicamente gocce di un fluido magnetizzato al centro di un piatto dove, come dipoli magnetici, si respingono a vicenda¹⁰. Similmente Levitov ne ha trovato nel reticolo di flusso di un semiconduttore, e Jean ha mostrato che i metodi della fillotassi possono essere utili per predire la

distribuzione di residui in una catena di polipeptidi (cfr. [2]). Da un altro punto di vista questo fatto insegna che per quanto possa essere rilevante il ruolo dei geni per spiegare la formazione delle strutture di fillotassi, non ci si può limitare a spiegazioni puramente genetiche, che sarebbero inefficaci di fronte all'emergenza di tali strutture in assenza di geni.

Conclusione: spunti di ricerca

La veloce panoramica su una disciplina poco nota in Italia è stata rivolta, pur nei limiti dello spazio a disposizione e del taglio non specialistico, a far risaltare i numerosi aspetti per i quali la fillotassi risulta degna di una ricerca storica ed epistemologica.

Questo è ancor più vero in Italia, dove questi argomenti sono poco conosciuti e solo recentemente stanno ottenendo una certa fortuna nelle pubblicazioni divulgative che purtroppo si limitano a fasciose illustrazioni e spiegazioni tanto semplicistiche quanto errate¹¹. Forse è per questo motivo che agli occhi di molti la fillotassi appare una disciplina semplice. La panoramica qui presentata dovrebbe, almeno negli auspici, contribuire a mettere in crisi questo pregiudizio¹².

Dal punto di vista prettamente storico, bisogna fare ancora molto: sono gli stessi autori del breve articolo "A History of the Study of Phyllotaxis" ([2]) a segnalare che "c'è spazio per una considerevole espansione di una storia delle ricerche in fillotassi". Inoltre, questa scienza si propone come esemplare per studi sull'evoluzione della scienza. Ovvero: come lascia intuire la panoramica presentata, molte sono le problematiche di storia e filosofia della scienza che trovano riscontro nella storia, anche recentissima, della fillotassi. Dato che non è possibile in questa sede affrontarle dettagliatamente e sarebbe riduttivo concentrarsi su una sola di esse, se ne propone qui un breve elenco molto schematico:

- Come accennato, delle stesse strutture di fillotassi sono state proposte circa trenta spiegazioni teoriche. Come districarsi fra questa moltitudine? Quali sono i criteri che permettono di avvallare una teoria piuttosto che un'altra?
- L'approccio multidisciplinare verso il quale si stanno orientando gli studi in fillotassi è un fenomeno molto attuale anche in altri settori della scienza. In quale modo diversi saperi possono contribuire alla costruzione di un'unica spiegazione?
- Può sorprendere che un sapere astratto e, secondo alcuni, costruito dall'uomo, la matematica, sia di così prezioso e insostituibile aiuto per rappresentare, e quindi conoscere meglio, dei fatti naturali. Dietro a questa sorpresa sta un ampio dibattito, ben lungi dall'essere concluso, riguardo la presunta "irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali"¹².
- A differenza della fisica, che nella sua forma moderna è venuta costituendosi assieme alla matematica, la biologia ha avuto uno sviluppo storico del tutto indipendente dalla matematica. Questo è il motivo sostanziale che rende così difficile e assieme fecondo l'avvicinamento che oggi sta avvenendo fra le due scienze. Questa tematica attualissima potrebbe essere chiarita dall'analisi della fillotassi, che è di gran lunga la più vecchia branca della cosiddetta "biomatematica"
- Nei approcci alla fillotassi ci si imbatte in numerosi conflitti fra punti di vista spesso agli antipodi. Il caso più evidente è quello fra approcci teleonomici ed evolucionistici. Ma anche quello fra teorie che si contentano di rappresentare ed altre che aspirano ad una spiegazione esaustiva attraverso la ricerca di cause. Inoltre, la tensione fra spiegazioni che intravedono nelle strutture della fillotassi una risposta a esigenze funzionali e altre che le considerano conseguenze di forze fisiche esercitate dall'esterno
- Infine, è opportuno segnalare come i molti sforzi compiuti per fare luce sull'argomento hanno sì portato molta chiarezza, ma sono ben lungi, per ammissione stessa dei ricercatori, dall'aver risposte definitive. Ciò risalta in modo speciale in questo ristretto ambito, ma è un fatto comune a tutte le scienze, che sono formate da teorie sempre più accurate ma mai definitive. Un fatto ben noto a chi la scienza la pratica e spesso del tutto ignoto ai profani, anche qui per via del pessimo servizio reso alla scienza da una cattiva divulgazione.

Note

1 L'apice meristemato, o meristema apicale, è la parte terminale del fusto che mediante divisioni genera cellule indeterminate che in seguito si specializzeranno in foglie, gemme, brattee, semi o altro.

2 Nel *Liber abaci* questa successione emerge come soluzione ad un problema “dilettevole” sulla riproduzione di una famiglia di conigli. Fibonacci non fece alcun cenno al ruolo di questi numeri in botanica

3 I numeri di Fibonacci si incontrano mediamente nel 92% dei casi. Ma tutte le altre coppie di numeri che si incontrano contando nella fillotassi delle piante sono sempre termini di successioni ricorsive governate dalla stessa regola per cui la somma di due termini consecutivi dà il termine successivo. In particolare, si trovano le successioni 2,4,6,10,16.... nel 6% dei casi, 1,3,4,7,11,18... nell'1,5%, e molto più raramente le successioni $1,t,1+t, 1+2t,2+3t....$ con $t = 4,5,6,7$ e 2,5,7,12,19.

4 Si veda ad esempio [5]

5 La sezione aurea è, appunto, una sezione, per esempio di un segmento. Si tratta dell'unico modo di dividere un segmento in modo tale che il rapporto fra l'intero e la parte maggiore sia uguale al rapporto fra la stessa parte maggiore e la parte minore. Risulta che il valore numerico di questo rapporto è irrazionale (ovvero non si può esprimere come un rapporto di numeri interi) e

vale $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ossia circa 1,618033... Questo numero viene solitamente rappresentato dai matematici

con la lettera τ , iniziale di *tomos*, sezione, e dai golden-numeristi con la lettera Φ iniziale di Fidia, il progettista del Partenone, alludendo alla presunta ricorrenza in esso del rapporto aureo.

Presso i Greci questa sezione era nota col nome tecnico di “divisione in media ed estrema proporzione” (“sezione aurea” è una locuzione ottocentesca, cfr. la nota 6) ed era studiata per il suo ruolo chiave nel pentagono regolare e nei solidi regolari. Non si hanno notizie certe dell'interesse extra-matematico dei greci per questa sezione. Conviene anche segnalare che, nonostante quanto asserito da certa divulgazione, neppure Leonardo da Vinci non vi fece alcun cenno nei suoi scritti.

L'intima relazione fra numero aureo e numeri di Fibonacci consiste nel fatto che il rapporto fra due termini consecutivi della successione di Fibonacci tende esattamente a τ . Non solo: ogni successione governata dalla stessa ricorsione di quella di Fibonacci, ma che si differenzia da essa per la scelta dei primi due termini, gode della stessa proprietà. Ciò implica che si può parlare di un ruolo del numero aureo nella fillotassi anche in quell'8% dei casi nei quali non compaiono numeri di Fibonacci (cfr. nota 4)

6 E' interessante osservare come proprio in quegli anni e proprio in Germania compaia per la prima volta l'espressione “goldener Schnitt” (sezione aurea) in una nota della seconda edizione (1835) del *Die reine Elementar-Mathematik* di Martin Ohm (cfr. [5]). Il fatto potrebbe essere casuale ma meriterebbe una analisi storica

7 La sezione aurea di un segmento lungo 1 cade nel punto $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ che vale circa 0,618

8 Per chiarire questa invero imprecisa affermazione si consultino i capitoli 10: “Continued fractions” e 11: “Approximation of irrationals by rationals” del libro G.H.Hardy, E.M.Wright, *The theory of numbers*, Oxford, 1938

9 Adler, Barabé e Jean riportano come Wiesner avesse condotto esperimenti su foglie artificiali per fondare la sua tesi, ma che “un esame attento dei suoi dati mostra che questi non supportano la sua tesi”.

10 Nel modello meccanico di Douady e Couder la divergenza fra le gocce oscilla assestandosi vicino alla sezione aurea dell'angolo giro.

11 Gli studi sulla fillotassi sono nati nel XIX secolo in Francia, Germania e Gran Bretagna. La loro esplosione nella seconda metà del XX secolo ha avuto luogo soprattutto nel Nord America.

12 Se non bastasse, ecco le parole con cui Jean introduce la disciplina: “Nelle varie aree della botanica, la fillotassi è spesso considerata il fenomeno più sorprendente, che solleva i problemi più difficili”.

Bibliografia essenziale

- [1]Adler I., “A model of contact pressure in phyllotaxis” sul *Journal of Theoretical Biology* 45, 1974
- [2]Adler I., Barabé D., Jean R.V., “A History of the Study of Phyllotaxis”, *Annals of Botany* 80, 1997
- [3]Coxeter H.S.M., *Introduction to geometry* (cap. 11: “The golden section and phyllotaxis”), New York, 1961.
- [4]S.Douady, Y.Couder, “Phyllotaxis as a Dynamical Self Organizing Process”, *Journal of theoretical Biology* 178, 1996
- [5]Herz-Fischler R., *A Mathematical History of the Golden Number*, New York, 1998
- [6]Jean R.V. *Mathematical approach to pattern and form in plant growth*, New York 1984
- [7]Jean R.V., “Phyllotaxis: the Status of the Field”, *Mathematical Biosciences* 127, 1995
- [8] Schwabe, W.W. “Phyllotaxis”, in *Positional Control in Plant Development*, New York, 1984